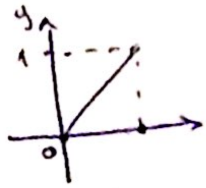
Απειροστικός Λογισμός Ι — Μάθημα 24 — 13/01/2016

Παρατήρηση: Καμία από τις 3 υποθέσεις του Θ. Rolle δε μπορεί να παραληφθεί.

1) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ 0, & x=1 \end{cases}$

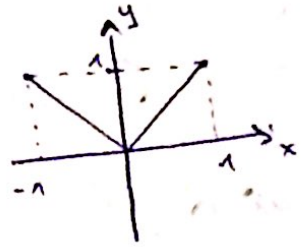


Η f ικανοποιεί τα β) και γ) αλλά όχι το α)

$f'(x)=1 \quad \forall x\in(0,1)$

Η υπόθεση α) δεν μπορεί να παραληφθεί.

2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$



Η f ικανοποιεί τα α) και γ) αλλά όχι το β) και δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα.

3) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$

Η f ικανοποιεί τα α) και β) αλλά όχι το γ) και δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα.

Παραδείγματα:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ \lambda, & x=0 \end{cases}$

Εφόσον η f δεν έχει όριο στο 0, η f δεν είναι συνεχής. (Οποιο και αν είναι το λ.)

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x| \Rightarrow -|x|\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq|x| \quad \forall x\neq 0$

Εφόσον $\lim_{x\to 0}-|x|=0=\lim_{x\to 0}|x|$ προκύπτει $\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Δηλαδή, $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. Άρα η f συνεχής στο 0

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως γινόμενο δύο συνεχών.
[Η $\sin(\frac{1}{x})$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.]

Για $x\neq 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\sin(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \sin(\frac{1}{x})$

η οποία δεν έχει όριο καθώς $x\to 0$.

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Για $x\neq 0$ είναι παραγωγίσιμη.

$$f'(x) = \sin(\tfrac{1}{x}) + x\cos(\tfrac{1}{x})\cdot(-\tfrac{1}{x^2}).$$

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = 2x\sin(\tfrac{1}{x}) + x^2\cos(\tfrac{1}{x})\cdot(-\tfrac{1}{x^2}) = 2x\sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x})$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})-0}{x-0} = x\sin(\tfrac{1}{x})$$

Επειδή $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})=0$ έχουμε $f'(0)=0$

Έτσι, $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}) & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$

Η f' προφανώς είναι συνεχής για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
Η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

Θα δείξουμε ότι η f' δεν έχει όριο καθώς $x\to 0$.

$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ $\quad f'(x_n) = 2\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \to \underline{\underline{-1}}$

$y_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2} \to 0$ $\quad f'(y_n) = 2\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\sin(2n\pi+\pi/2) - \cos(2n\pi+\pi/2) = \frac{2}{2n\pi+\pi/2} \to \underline{\underline{0}}$

Άρα, η f' δεν έχει όριο στο 0 επομένως δεν είναι συνεχής στο 0.

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x^3\sin(\frac{1}{x}) & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη και η f' συνεχής.

Θεώρημα: (Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε η f συνεχής στο $[a,b]$, η f παραγωγίσιμη στο (a,b).

Τότε, υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Απόδειξη:

Ορίζουμε $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

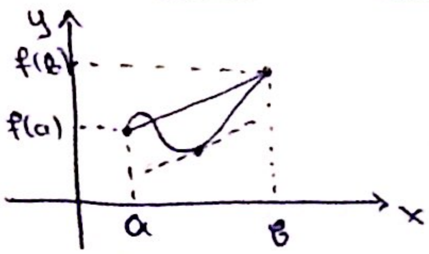
Η g συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

και $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(a)$. Δηλαδή, $g(a)=g(b)$.

Από Θ. Rolle $\exists x_0\in(a,b)$ με $g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ



Θεώρημα: Έστω I διάστημα και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε η f παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I (ενδεχομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα του I).

(i) Αν $f'(x)\geq 0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι αύξουσα στο I.

(ii) Αν $f'(x)>0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο I

(iii) Αν $f'(x)\leq 0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι φθίνουσα στο I.

(iv) Αν $f'(x)<0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο I

(v) Αν $f'(x)=0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι σταθερή στο I.

Απόδειξη:

Έστω $a,b\in I$ με $a<b$.

Η f συνεχής στο $[a,b]$ και παρ[αγωγίσιμη]

στο (a,b).

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού $\exists x_0 \in (a,b)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (Ι). Επειδή $a<b$ έχουμε $b-a>0$.

(i) $f'(x) \geq 0 \overset{(I)}{\Rightarrow} f(b)-f(a) \geq 0 \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ f αύξουσα.

(ii) $f'(x) > 0 \overset{(I)}{\Rightarrow} f(b)-f(a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$ f γνησίως αύξουσα.

(iii) $f'(x) \leq 0 \overset{(I)}{\Rightarrow} f(b)-f(a) \leq 0 \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ f φθίνουσα.

(iv) $f'(x) < 0 \overset{(I)}{\Rightarrow} f(b)-f(a) < 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ f γνησίως φθίνουσα.

(v) $f'(x) = 0 \Rightarrow f(b)-f(a) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b)$ f σταθερή.

<u>Σημείωση</u>: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) ώστε $f'(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$ τότε η f γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{1}{2}x^4+\frac{x^3}{3}$

$f'(x)=x^4-2x^3+x^2=x^2(x^2-2x+1)=x^2(x-1)^2$

$f'(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ (f συνεχής παντού)

Επειδή $f'(x)>0$ $\forall x\in(-\infty,0)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$

Επειδή $f'(x)>0$ $\forall x\in(0,1)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$

Επειδή $f'(x)>0$ $\forall x\in(1,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα</u>: Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy.

Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε

α) f,g συνεχείς στο $[a,b]$

β) f,g παραγωγίσιμες στο (a,b)

γ) Οι f',g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a,b)

[Δηλαδή δεν υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f'(\xi)=0=g'(\xi)$]

δ) $g(a)\neq g(b)$

Τότε, $\exists x_0\in(a,b)$ ώστε $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Απόδειξη:

Ορίζουμε $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$

Η h συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με

$h'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)-(g(b)-g(a))f'(x)$

$h(a)=f(b)\cdot g(a)-g(b)\cdot f(a)$

$h(b)=f(b)\cdot g(a)-g(b)\cdot f(a)$ Άρα, $h(a)=h(b)$.

Από το Θεώρημα Rolle $\exists x_0\in(a,b)$ ώστε $h'(x_0)=0 \Rightarrow$

$(f(b)-f(a))g'(x_0)=(g(b)-g(a))\cdot f'(x_0)$

Ισχυρισμός: $g'(x_0)\neq 0$

[Αν $g'(x_0)=0$ τότε $(g(b)-g(a))\cdot f'(x_0)=0$ όμως $g(b)\neq g(a)$

άρα $f'(x_0)=0$. Δηλαδή, το x_0 κοινή ρίζα των f' και g' Άτοπο!]

Έτσι, $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Θεώρημα: (Κανόνας De L'Hospital)

Έστω $f,g:(a,x_0)\cup(x_0,b)\to\mathbb{R}$ ώστε f,g παραγωγίσιμες και:

(i) $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$.

(ii) $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$

(iii) υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\in\mathbb{R}$.

Τότε, υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και είναι ίσο με ℓ.

Απόδειξη:

Επεκτείνουμε τις f,g στο x_0 ορίζοντας $f(x_0)=g(x_0)$.

Τότε, οι f,g είναι συνεχείς λόγω του (ii) στο x_0 και λόγω παραγωγισιμότητας στα άλλα σημεία.

Θα δείξουμε ότι: $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

[και ομοίως αποδεικνύεται ότι $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.]

Έστω $x\in(x_0,\beta)$.

Τότε, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$

Θα εφαρμόσουμε το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy στο $[x_0,x]$

α) f,g συνεχείς στο $[x_0,x]$

β) f,g παραγωγίσιμες στο (x_0,x)

γ) Οι f',g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (x_0,x) [επειδή $g'(x)\neq 0$ $\forall x$ από (ii)]

δ) $g(x_0)=0\neq g(x)$.

Από Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy $\exists\, \xi_x\in(x_0,x)$ ώστε $\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή, $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ $\exists\, \delta>0$ ώστε $\forall t$ με $x_0<t<x_0+\delta$ ισχύει $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}-\ell\right|<\varepsilon$. Για κάθε $x\in(x_0,x_0+\delta)$ ισχύει

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| = \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}-\ell\right| < \varepsilon$$ διότι $x_0<\xi_x<x<x_0+\delta$.

Επομένως, $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.